NOM : **Prénom :** **Classe : PCSI**

Devoir Surveillé 2

Les réponses sont à écrire exclusivement sur ce document

Les différentes questions sont indépendantes les unes des autres.

Vous accorderez un soin particulier aux justifications que vous apporterez à vos réponses, qui auront une grande importance dans votre note.

1 Théorèmes de Morgan

Question 1. Énoncer les deux théorèmes de Morgan

Question 2. Démontrer un des deux théorèmes de Morgan, après avoir précisé celui que vous choisissez de démontrer.

2 Expressions booléennes

Question 3. Écrire l'opérateur booléen "xor" de deux manières différentes. On rappelle le tableau de vérité de xor :

A	B	A xor B
True	True	False
True	False	True
False	True	True
False	False	False

Question 4. Dans une pièce, il y a trois interrupteurs A, B, C. La pièce est allumée quand un nombre impair d'interrupteurs est en position `True` (qui équivaut à un interrupteur fermé) et elle est éteinte sinon.

Écrire, en justifiant, l'expression booléenne L qui donne la valeur `True` quand la pièce est allumée et `False` quand elle est éteinte en fonction de A, B et C.

3 Algorithme d'Euclide

Question 5. Écrire une fonction `Euclide(a,b)` qui prend en arguments deux entiers positifs `a` et `b` et qui détermine leur PGCD calculé à l'aide de l'algorithme d'Euclide par division successives.

Question 6. Écrire la ligne de commande, saisie dans la console, qui affiche le PGCD de 10^10+2 et de 10^20+2.

4 Variables globales et locales

Question 7. Donner la définition d'une variable globale et d'une variable locale.

5 Tour de puissances

Question 8. Écrire une fonction `tour(n,k)` prenant en arguments deux entiers positifs `n` et `k` et qui renvoie la n-ième puissance itérée de k, autrement dit $k^{k^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k}}}}}$ formé de n exemplaires de k.

6 Intégration numérique

On rappelle la formule de calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles à gauche :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

Question 9. Écrire une fonction `rectangles(f,a,b,n)` qui prend en arguments une fonction f, des flottants a et b et un entier n et qui renvoie le résultat du calcul approché de l'intégrale de a à b de la fonction f en n pas telle que donnée par la formule écrit plus haut.

Question 10. Écrire une suite de commandes (on pourra éventuellement définir une fonction) qui calcule en 10^5 pas par la méthode des rectangles à gauche l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^3}dx$$

7 Contrôle de rendu de monnaie

On s'intéresse dans cet exercice au fonctionnement d'une machine qui rend de la monnaie, selon un algorithme pour nous inconnu.

Cette machine travaille avec deux listes de nombres : une liste `denomination` et une liste `rendu`.

La liste `denomination` contient une liste d'entiers ou de flottants, rangée par ordre strictement décroissant, et correspondant aux billets et/ou pièces dont dispose la machine. Par exemple, dans le système monétaire européen, si la machine peut rendre des billets de 5, 10 et 20 euros, et toutes les pièces possibles, la liste serait :
`denomination=[20,10,5,2,1,0.5,0.2,0.1,0.05,0.02,0.01]`

La liste `rendu` est de la même longueur que la liste `denomination` et contient des entiers positifs. Ces entiers correspondent aux nombres de pièces et/ou billets associés à la liste `denomination` que la machine doit rendre. Par exemple, avec la liste `denomination` précédente, la liste :
`rendu=[0,1,0,0,1,1,0,0,0,0,0]`
correspondrait à un rendu d'un billet de 10 euros, un pièce de 1 euro et un pièce de 50 centimes, pour un montant à rendre de 11,50 euros.

Question 11. Écrire une fonction `testrendu(L,D)` qui prend en argument une liste `L` et qui vérifie si cette liste est susceptible d'être une liste de rendu de monnaie (une liste d'entiers positifs) associée à la liste `D` qui est une liste de dénomination supposée valide. Cette fonction renverra un booléen.

Question 12. Écrire une fonction `testdenomination(D)` qui prend en argument une liste `D` et qui vérifie si cette liste est susceptible d'être une liste de dénominations (donc une liste d'entiers ou de flottants strictement positifs et strictement décroissante). Cette fonction renverra un booléen.

Question 13. Écrire une fonction `monnaie(L,D)` qui prend en arguments deux listes `L` et `D`, qui sont ici supposées être des listes valides de rendu et de dénomination, et qui renvoie le montant total rendu par la machine.

Question 14. Écrire une fonction `testretour(L,D,x)` qui prend en argument deux listes `L` et `D`, représentant `a priori` des listes de rendu et de dénomination, et un nombre `x` et qui renvoie le booléen :

- `False` si les listes `L` et `D` ne sont pas des listes de rendu et de dénomination valides ou si le montant à rendre associé aux listes `L` et `D` n'est pas égal à `x` ;
- `True` si les listes `L` et `D` sont valides et que le montant associé à ces listes et est égal à `x`

On se servira des fonctions précédemment codées dans cet exercice, même si on n'a pas su les coder.

Question 15. Avec la liste dénomination donnée en exemple au début de l'exercice, l'algorithme, pour le montant de 9 centimes crée la liste de rendu suivante :

`[0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1]`

Expliquer comment cette erreur a pu se produire, et ce que vous pourriez faire pour que cette erreur ne se produise pas (8 lignes maximum)

8 Boucles imbriquées

Question 16. Écrire une fonction `somme1` d'argument `n` qui retourne la valeur de la somme suivante :

$$\sum_{i=0}^{i=n}\sum_{j=0}^{j=n}\frac{1}{i^2+j^2+1}$$

Question 17. Quelle est la complexité de l'algorithme précédemment écrit ? On utilisera la notation $\mathcal{O}$

Question 18. Écrire une fonction `somme2` d'argument `n` qui retourne la valeur de la somme suivante :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^2-\sqrt{j}$$

Question 19. On se place dans la suite de cet exercice dans un repère orthonormal de l'espace usuel.

On rappelle qu'une sphère de rayon R et centrée en (a, b, c) a pour équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Écrire une fonction `pointsentiers(a,b,c,R)` qui prend en argument des entiers a,b, et c correspondant au centre d'une sphère, un entier R correspondant à son rayon et qui affiche à l'écran l'ensemble des points (x,y,z) à coordonnées **entières** (x, y et z doivent tous les trois être entiers) et qui appartiennent à cette sphère.

Question 20. Quelle est la complexité de l'algorithme précédemment écrit ? On utilisera la notation $\mathcal{O}$

Question 21. Est-il possible de diminuer le nombre de calculs nécessaires pour résoudre le problème précédent ?