Tris : complexités en moyenne

1 Tri par insertion

Exercice 1. On suppose que le tableau initial est dans un ordre aléatoire. On note `T = [T(0),...,T[n-1]]` avec `n = len(T)`. On va étudier dans un premier temps le nombre moyen d'inversions, avant de passer au dénombrement des comparaisons pour calculer la complexité.

1. Donner un espace probabilisé permettant de modéliser le problème.
2. On note X_k la variable aléatoire comptant le nombre d'inversions subies par l'élément à l'origine en `T[k]`. Déterminer les lois de X_0, de X_1 et, finalement, de X_k.
3. En déduire une expression exacte du nombre moyen d'inversions.
4. En considérant l'algorithme triant le tableau par ordre décroissant, retrouver sans calcul le résultat précédent.
5. On note X'_k le nombre de comparaisons. Exprimer X'_k en fonction de X_k. En déduire que la complexité de l'algorithme de tri par insertion est

$$\frac{n^2+3n}{4} - \ln n + \mathcal{O}(1).$$

2 Tri rapide

Exercice 2 (Étude en moyenne du tri rapide.)**.** On fait l'hypothèse naturelle qu'à chaque étape, le pivot a la même probabilité de se trouver dans chacune des cases disponibles du tableau.

On note c_n le nombre moyen de comparaisons.

1. Montrer que $c_n = n - 1 + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k$.
2. En déduire que $nc_n - (n+1)c_{n-1} = 2(n-1)$.
3. Posons $v_n = \dfrac{c_n}{n+1}$. Montrer que $v_n = v_0 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{4}{n+1} - 4$.
4. En déduire que $c_n = \mathcal{O}(n \ln n)$.