TP 3 - 2015-2016
Résolution numérique des EDO

Exercice 1 : oscillateur harmonique

Soient y une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $t_{\min}$ et $t_{\max}$ deux réels tels que $t_{\min} < t_{\max}$. On note I l'intervalle $[t_{\min}; t_{\max}]$. On s'intéresse à une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$(1) \qquad \forall t \in I : \quad y''(t) = f(y(t)),$$

où f est une fonction donnée, continue sur $\mathbb{R}$. De nombreux systèmes physiques peuvent être décrits par une équation de ce type.

On suppose connues les valeurs $y_0 = y(t_{\min})$ et $z_0 = y'(t_{\min})$. On suppose également que le système physique étudié est conservatif. Cela entraîne l'existence d'une quantité indépendante du temps (énergie, quantité de mouvement, ...), notée E, qui vérifie l'équation suivante avec $g' = -f$.

$$(2) \qquad \forall t \in I : \quad \frac{1}{2}y'(t)^2 + g(y(t)) = E.$$

Pour résoudre numériquement l'équation différentielle (**??**), on introduit la fonction $z\colon I \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in I : \ z(t) = y'(t)$. L'équation (**??**) peut alors se mettre sous la forme d'un système différentiel du premier ordre en $z(t)$ et $y(t)$, que l'on note (S).

Question 1. Expliciter ce système différentiel.

Soit n un entier strictement supérieur à 1 et $J_n = [\![0; n-1]\!]$. On pose $h = \dfrac{t_{\max} - t_{\min}}{n-1}$ et $\forall i \in J_n, t_i = t_{\min} + ih$. On peut alors montrer que pour tout entier $i \in [\![0; n-2]\!]$:

$$(3) \qquad y_(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} z(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } z(t_{i+1}) = z(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t))\,\mathrm{d}t.$$

Dans la suite de ce TP, nous allons implémenter deux méthodes numériques dans lesquelles les intégrales précédentes sont remplacées par une valeur approchée.

Partie I : schéma d'Euler explicite

Dans le schéma d'Euler explicite, chaque terme sous le signe intégrale est remplacé par sa valeur prise en la borne inférieure.

Question 2. Dans ce schéma, montrer que les équations (**??**) permettent de définir deux suites $(y_i)_{i \in J_n}$ et $(z_i)_{i \in J_n}$, où y_i et z_i sont des valeurs approchées de $y(t_i)$ et $z(t_i)$. Donner les relations de récurrence permettant de déterminer les valeurs de y_i et z_i connaissant y_0 et z_0.

Question 3. Écrire une fonction `euler` qui reçoit en argument les paramètres qui vous semblent pertinents et qui renvoie deux listes de nombres correspondant aux valeurs associées aux suites $(y_i)_{i \in J_n}$ et $(z_i)_{i \in J_n}$.

Question 4. Pour illustrer cette méthode, on considère l'équation différentielle $\forall t \in I, y''(t) = -\omega^2 y(t)$ dans laquelle ω est un nombre réel. Cette équation est conservative.

Mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite avec $y_0 = 3$, $z_0 = 0$, $t_{\min} = 0$, $t_{\max} = 3$, $\omega = 2\pi$ et $n = 100$.

Question 5. Tracer la courbe de l'évolution de $y(t)$ en fonction de t.

Question 6. Tracer le portrait de phase : il s'agit de la courbe paramétrée $t \longmapsto (y(t), z(t))$.

Question 7. En quoi ce graphe montre-t-il que le schéma numérique ne conserve pas E (on peut prendre $f(x) = \dfrac{1}{2}\omega^2 x^2$ dans (**??**)) ?

Partie II : schéma de Verlet

Le physicien français Loup Verlet a proposé en 1967 un schéma numérique d'intégration d'une équation de la forme (1) dans lequel, en notant $f_i = f(y_i)$ et $f_{i+1} = f(y_{i+1})$), les relations de récurrence s'écrivent :

$$y_{i+1} = y_i + hz_i + \frac{h^2}{2} f_i \quad \text{et} \quad z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}). \tag{4}$$

Question 8. Écrire une fonction `verlet` qui reçoit en argument les paramètres qui vous semblent pertinents et qui renvoie deux listes de nombres correspondant aux valeurs associées aux suites $(y_i)_{i\in J_n}$ et $(z_i)_{i\in J_n}$.

Question 9. On reprend l'exemple de l'oscillateur harmonique. Mettre en œuvre le schéma de Verlet avec les mêmes paramètres que ceux utilisés à la question **??**.

Question 10. Tracer la courbe de l'évolution de $y(t)$ en fonction de t.

Question 11. Tracer le portrait de phase.

Question 12. Interpréter l'allure de ce graphe. Que peut-on conclure sur le schéma de Verlet ?

Exercice 2 : démodulation d'amplitude

Partie I : transmission d'un signal électrique

Un signal électrique sinusoïdal est transmis selon le principe suivant : la tension est donnée par

$$e(t) = E_0(t)\sin(2\pi f t),$$

où f est la fréquence du signal, qui reste constante, et $E_0(t)$ une fonction prenant deux valeurs $E_{\min}$ et $E_{\max}$. Le choix entre ces deux valeurs est fait selon une liste binaire `L`, le bit 0 correspondant à $E_{\min}$ et le bit 1 à $E_{\max}$. Un nouveau bit est lu toutes les seize périodes et la valeur de E_0 ainsi actualisée. Les valeurs de la tension $e(t)$ sont codées sous la forme de listes correspondant à des intervalles de temps réguliers de longueur Δt.

Question 13. Écrire une fonction `init_T(N,dt,f)` prenant en argument le nombre de périodes N, le pas `dt`$= \delta t$ de temps projeté et la fréquence f du signal et renvoyant la liste `T` des instants de mesure correspondants. Si la période n'est pas un multiple de Δt, on arrondira sa valeur à la plus grande valeur inférieure.

Question 14. Écrire une fonction `init_E(N,dt,f,L,Emin,Emax)` prenant en argument les valeurs δt et f précédentes, les valeurs des tensions minimale et maximale et une liste binaire `L` et retournant la liste correspondante des tensions $e(t)$.

Question 15. Tracer le signal électrique pour `L=[0,1,0]`, $E_{\min} = 1,3\,\text{V}$, $E_{\max} = 1,5\,\text{V}$ et $f = 13,56\,\text{MHz}$ et $\Delta t = 5.10^{-4}\,\text{s}$.

Partie II : décodage du signal électrique transmis

Pour récupérer l'information binaire (contenue initialement dans la liste `L`) et transmise électriquement,il faut extraire l'amplitude du signal. Cela se fait par le dispositif ci-dessous, appelé *détecteur d'enveloppe*.

`tp3fig1.png`

La modélisation du comportement de ce montage permet d'exprimer la tension de sortie $s(t)$ en fonction de la tension d'entrée $e(t)$ de la façon suivante (τ est la constante de temps du circuit RC) :

(1) Si la diode est bloquée, alors $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + \dfrac{1}{\tau}s(t) = 0$ et il faut vérifier que $s(t) > e(t)$.

(2) Si la diode est passante, alors $s(t) = e(t)$ et il faut vérifier que $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + \dfrac{1}{\tau}s(t) > 0$.

Autrement dit, la diode peut prendre deux états (bloquée ou passante), chacun soumis à une condition (inégalité) et munie d'une équation d'évolution (égalité) ; lorsque la condition cesse d'être vérifiée, la diode change d'état. Nous allons utiliser ces équations pour simuler numériquement l'évolution de la tension $s(t)$. Pour cela on se propose d'utiliser une variable booléenne `etat`, indiquant l'état de la diode à chaque pas de temps t_i :
- de calculer $s(t_{i+1})$ en utilisant l'équation correspondant à la valeur de la variable à l'instant t_i
- *puis* de tester la condition correspondante à partir de la valeur de $s(t_{i+1})$ et, si elle n'est plus vérifiée, de mettre à jour la variable `etat`.

Le résultat est stocké dans une liste `S` avec `S[i]`$= s(t_i)$.

Question 16. Donner une approximation de $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t_i)$ en fonction de $s(t_i)$, $s(t_{i+1})$ et $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ en utilisant la formule d'Euler explicite. En déduire dans le cas où la diode est bloquée à l'instant t_i, la relation de récurrence donnant $s(t_{i+1})$ en fonction de $s(t_i)$, τ et Δt.

Question 17. On se place maintenant dans le cas où la diode est passante. Donner une condition portant sur $s(t_i)$, $e(t_{i+1})$, τ et Δt permettant de déterminer si la diode est bloquée ou non à l'instant t_{i+1}.

Question 18. Écrire la fonction `solve(T,E,tau)` prenant pour arguments la liste `T` des instants de la simulation, la liste `E` des tensions d'entrée et la constante de temps `tau` et retournant la liste `S` des tensions de sortie. Les conditions initiales seront prises nulles et l'état de la diode sera initialement passant.

Les figures suivantes donnent les résultats (entrée et sorties numériques) obtenues pour trois pas de temps différents choisis parmi 1ns, 10ns et 100ns. Sur ces trois graphes, la tension d'entrée avant discrétisation est celle correspondant à la séquence de bits (0,1,0) et la constante de temps du circuit est $\tau = 1\mu s$. Seul le pas de temps change d'une simulation à l'autre.

Question 19. Indiquez la valeur du pas de temps (1, 10 ou 100 ns) correspondant à chacune de ces trois simulations.

Question 20. Expliquez en quelques phrases les causes des différences obtenues entre les trois résultats $s(t)$. Repérez en particulier les instants auxquels la diode changé d'état. Que constatez-vous ?

Pour distinguer l'état *haut* de l'état *bas* de la tension $s(t)$ et ainsi extraire les 0 et 1 du message binaire transmis par modulation, il est nécessaire de déterminer un seuil séparant les deux niveaux.

Question 21. Indiquer pour chacun des trois résultats, s'il est possible d'identifier un tel seuil, et donc si la récupération du message binaire semble réalisable *si l'on se base uniquement sur ce résultat.* Conclure sur le critère que doit respecter le pas de temps d'une simulation temporelle pour que les résultats de celle-ci aient une chance d'être pertinents.

`tp3fig2.png`

`tp3fig3.png`