TP 5 : Listes ; intégrales

Exercice 1. Rendu de monnaie : algorithme glouton

La société Sharp commercialise des caisses automatiques utilisées par exemple dans des boulangeries. Le client glisse directement des pièces ou des billets dans la machine, qui se charge de rendre directement la monnaie.

Afin de satisfaire les clients, on cherche à déterminer un algorithme qui va rendre le moins de monnaie possible.

La machine dispose de billets de 20€, de 10€, et de 5€.

Elle dispose de pièces de 2€, de 1 €, de 50c, 20c, 10c, 5c, 2c et 1c.

On se propose donc de concevoir un algorithme qui demande à l'utilisateur du programme la somme totale à payer, ainsi que le montant inséré par l'acheteur. Le programme affichera alors à l'écran les billets et pièces à rendre par la machine.

Introduction aux méthodes numériques de calculs d'intégrales

Calculer une intégrale est un problème très courant dans de nombreux domaines scientifiques. Or un calcul direct est parfois très difficile et parfois complètement impossible.
De ce fait, il existe en analyse numérique une vaste famille d'algorithmes dont le but principal est d'estimer la valeur numérique de l'intégrale d'une fonction d'une variable sur un intervalle donné.
Ces techniques procèdent en trois phases distinctes :

- *Décomposition du domaine en morceaux (un intervalle en sous-intervalles contigus).*
- *Intégration approchée de la fonction sur chaque morceau.*
- *Sommation des résultats numériques ainsi obtenus.*

Dans ce TP nous allons étudier plusieurs méthodes de calculs approchés d'intégrales. Certaines de ces méthodes seront reprises de manière détaillée en cours de Mathématiques.

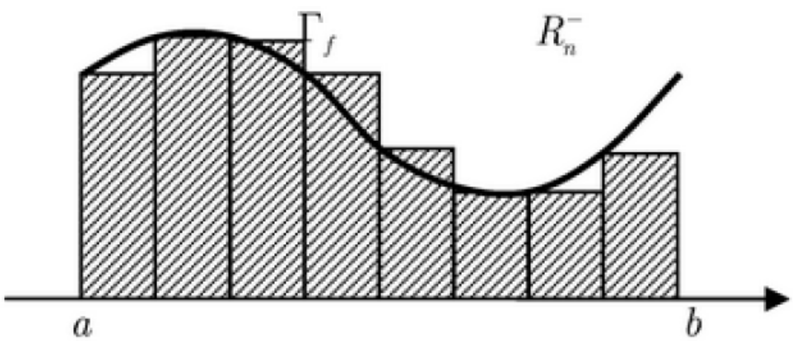
Les méthodes des rectangles et des trapèzes font explicitement partie du programme d'Informatique. On doit donc être capable de les programmer sans indication ou rappel de la formule.

Exercice 2. Méthode des rectangles à gauche

Il s'agit de la méthode la plus simple d'approximation d'une intégrale : on subdivise l'intervalle [a,b] d'intégration en n intervalles $[x_i\,;x_{i+1}]$ de même longueur :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{N-1} < x_N = b \text{ et } x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \text{ pour tout i}$$

On approxime ensuite l'intégrale de f sur le segment $[\mathrm{x}_i\,;\mathrm{x}_{i+1}]$ à la valeur de f au point x_i multipliée par la longueur du segment (cette formule correspond à l'aire d'un rectangle) :



La formule approchée de l'intégrale de f sur [a,b] est donnée par :

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

(1) Écrire une fonction qui calcule la valeur approchée de l'intégrale de 0 à 1 de x^2 avec la méthode des rectangles et n pas ; l'en-tête de la fonction sera def IntegraleRectanglev1(n)

(2) Faire quelques essais numériques en faisant varier n. Lorsqu'on multiplie le nombre d'étapes par 10 par quel facteur semble-t-on améliorer la précision du calcul de l'intégrale ?

(3) Adapter ce programme pour qu'il calcule l'intégrale de x^2 sur [a,b]. On l'appellera la fonction IntegraleRectanglev2 et on précisera son en-tête avant de commencer l'implémentation.

(4) Que constate-t-on sur la vitesse de convergence lorsque a=0 ; b=100 par rapport à la première question ?

(5) Adapter la fonction du calcul approché par la méthode des rectangles à gauche pour qu'elle puisse calculer l'intégrale sur [a,b] de n'importe quelle fonction. On réfléchira dans un premier temps à l'en-tête de la fonction.

(6) Application : On admet le résultat suivant :

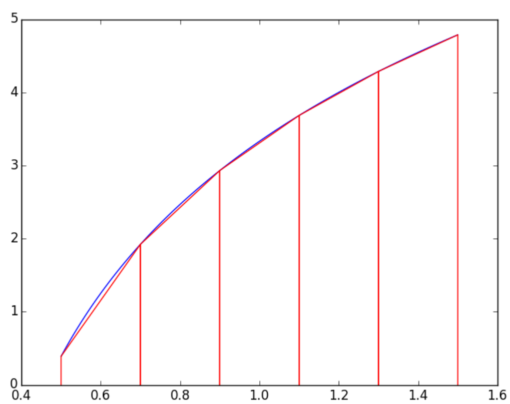
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

Tester votre fonction en évaluant l'erreur commise sur le calcul de π pour les valeurs de n suivantes :

- n=10
- n=30
- n=100
- n=300
- n=1000
- n=10^4
- n=10^5
- n=10^6

Exercice 3. Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes est une variante de la méthode des rectangles. Au lieu de prendre pour valeur approchée de l'intégrale sur chaque subdivision l'aire du rectangle de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $f(x_i)$, on prend désormais l'aire du trapèze formé par les points $M_i(x_i,0)$; $M_{i+1}(x_{i+1},0)$; $N_i(x_i,f(x_i))$ et $N_{i+1}(x_{i+1},f(x_{i+1}))$



La valeur approchée de l'intégrale de f sur [a,b] est donnée par :

$$T_n = \frac{b-a}{n}\Big(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{k=n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})\Big)$$

(1) Adapter la fonction précédente pour implémenter la méthode des trapèzes dans une fonction

```
def Trapeze(a,b,n,f):
```

(2) Comparer la qualité de l'approximation pour les mêmes valeurs de N pour $f(x) = x^2$ sur [0 ;1]

(3) Étudier l'erreur commise sur le calcul de π pour les différentes valeurs de n :
- n=10
- n=30
- n=100
- n=300
- n=1000
- n=10^4
- n=10^5
- n=10^6

Exercice 4. Intermède : Mot clé lambda

Taper à la console `Trapeze(0,1,100,lambda x:1/(1+x**2)`

Que se passe-t-il ?

Écrire un programme qui teste, sans modifier vos méthodes d'intégration, les méthodes des rectangles à gauche et à droite pour les fonctions $f(x) = x^k$ avec k allant de 1 à 10 pour les valeurs de n utilisées précédemment.

Exercice 5. Synthèse des résultats

Comparer la vitesse de convergence des deux méthodes d'intégration proposées.

Exercice 6. Méthode de Simpson

La méthode d'intégration de Simpson consiste à approcher sur chaque subdivision la fonction f par un polynôme du second degré (par quelle fonction les méthodes des rectangles et des trapèzes approchaient-elles f sur chaque subdivision ?)

Elle s'écrit :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right],$$

où :
- n est le nombre de sous-intervalles de [a, b] avec n pair ;
- $h = \dfrac{b-a}{n}$ est la longueur de ces sous-intervalles ;
- $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$

Implémenter la méthode de Simpson pour une fonction quelconque pour une intégration sur [a,b] avec n pas.

Tester votre méthode.