Algorithmes de résolution de f(x)=0
Partie 1 : Dichotomie

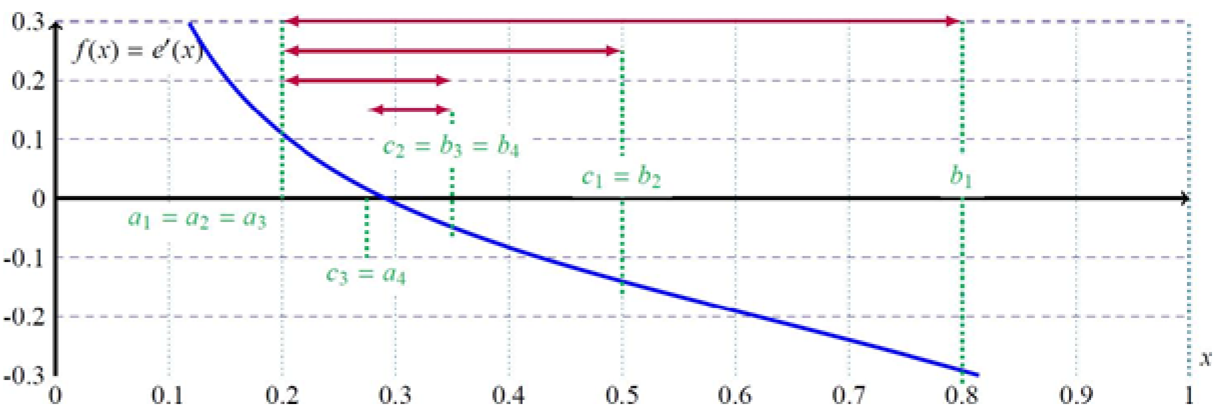
Soit $f(x)$ une fonction monotone sur [a,b] un intervalle contenant une racine de f.

1 Rappel de la méthode

Le principe est de diviser l'intervalle en deux parts égales, de conserver la partie contenant la racine et d'y reproduire l'opération jusqu'à ce que le critère de convergence soit satisfait.

A partir d'un intervalle donné [a, b], encadrant une racine de la fonction f étudiée :

- Calculer le point c milieu de l'intervalle : c $= \dfrac{a+b}{2}$
- Évaluer $p = f(a).f(c)$ puis effectuer les tests :
  - si $p > 0$, il n'y a pas de racine dans l'intervalle [a, c]. La racine est donc dans l'intervalle [c, b]. On donne alors à a la valeur de c
  - si $p < 0$, la racine est dans [a, c]. On donne alors à b la valeur de c
  - si $p = 0$, alors la racine est c. (cas numériquement rarissime)
- Effectuer le test d'arrêt : Évaluer le critère de convergence
- Recommencer si le critère de convergence n'est pas satisfait



2 Mise en œuvre

La méthode ne s'applique que :

- aux fonctions localement monotones.
- dont on connaît a priori un intervalle contenant la racine.

En ce qui concerne le test d'arrêt, on peut mettre en œuvre deux types différents de tests suivant les besoins du problème :

- précision suffisante sur l'intervalle de la racine : $b_n - a_n < \varepsilon$
- fonction suffisamment proche de zéro :$|f(c_n)| < \varepsilon$

3 Algorithme

Entrées : f,a,b,ε
ai $\leftarrow$ a bi $\leftarrow$ b **Tant que** bi-ai $>$ ε **faire** : c $\leftarrow$ (ai+bi)/2 **si** f(ai)*f(c) $\geqslant$ 0 **alors** : ai $\leftarrow$ c **sinon** : bi $\leftarrow$ c
Sorties : ai,bi

4 Implémentation en Python

Exercice 1. Implémenter cet algorithme en Python.

5 Vitesse de convergence

En analyse numérique, la vitesse de convergence d'une suite représente la vitesse à laquelle les termes de la suite se rapprochent de sa limite.

Supposons qu'une suite x_k converge vers une limite l.

On dit que cette suite **converge linéairement** vers l si il existe un réel $0<\lambda<1$ tel que :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x_{k+1} - l|}{|x_k - l|} = \lambda$$

Le nombre λ est appelé **vitesse de convergence**

Exercice 2. Quelle est la vitesse de convergence de la suite (c_n) de la méthode de dichotomie ?

6 Terminaison et correction

Exercice 3. Proposer un variant de boucle qui démontre la terminaison de l'algorithme de dichotomie

Exercice 4. Proposer un invariant de boucle qui démontre la correction de l'algorithme de dichotomie